Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 1/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

4 $\boxed{1}$ a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \end{pmatrix}$

Het stelsel $Ax = 0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Uitgebreide coëfficiëntenmatrix

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 0 \end{array}\right)$

Gaussische eliminatie $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \beta+1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \end{array}\right)$

~~Het~~ Als $\beta = 2$, dan oneindig veel oplossingen
Als $\beta \neq 2$, dan één oplossing. } (volgende opgave)

Hieruit ~~..~~ volgt dat er geen waarden voor β zijn, waarvoor ~~....~~ het stelsel $Ax=0$ strijdig is.

Klopt, maar misschien sneller: homogeen stelsel heeft altijd nuloplossing

4 b. Zie Gaussische eliminatie vorige som $\Rightarrow$ reduced row echelon form $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \end{array}\right)$

Als $\beta \neq 2$ $(\beta \in \mathbb{R})$ ~~dan volgt ...~~

en $(\beta-2)x^3 = 0$ ~~en~~

Dan $x_3 = 0$, de enige oplossing.

Het overgebleven stelsel ziet er als volgt uit:

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Dan ~~geldt~~ weer dat $x_2 = 0$.

En ook geldt daarna $x_1 = 0$.

$\Rightarrow$ Als $\beta \neq 2$ $^{\beta \in \mathbb{R}}$, dan is A niet-singulier en heeft het stelsel $Ax=0$, alleen de triviale oplossing $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dus precies één oplossing.

8

4 c ... Gaussische eliminatie ...

Reduced row echelon form $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 0 \end{array}\right)$.

Als $\beta = 2$

dan $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A$ singulier.

Hieruit volgt $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - x_3 \\ x_2 = -x_3. \end{array}$

Dan stel ik $x_3 = \alpha \Rightarrow x_2 = -\alpha \Rightarrow x_1 = -2(-\alpha) - \alpha$
$= \alpha$

Dus als $\beta = 2 \Rightarrow A$ singulier en $Ax = 0$ heeft oneindig veel oplossingen.

De oplossingsverzameling zijn vectoren van de vorm

$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 d. Uitgebreide coëfficienten matrix

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & \beta & 1 \end{array}\right)$

Gaussische eliminatie $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-2 & 1 \end{array}\right)$

Het stelsel is strijdig als $\beta = 2$.
Dan geldt $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$.
En deze vergelijking is strijdig.
Dus als $\beta = 2$ is het stelsel $Ax = b$ strijdig.

4 e Als $\beta \neq 2$ $\beta \in \mathbb{R}$ geldt $(\beta - 2)\, x_3 = 1$
$x_3 = \dfrac{1}{\beta - 2}$ ($\beta - 2 \neq 0$, want $\beta \neq 2$)

$x_2 + x_3 = 0$
$x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 = -\dfrac{1}{\beta-2}$
$x_1 = -2x_2 - x_3$
$= \dfrac{2}{\beta-2} - \dfrac{1}{\beta-2} = \dfrac{1}{\beta-2}$.

$\Rightarrow Ax = b$ is consistent als $\beta \neq 2$ ($\beta \in \mathbb{R}$). De oplossingsverzameling is dan van de vorm

$\dfrac{1}{\beta-2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta-2} \\ -\frac{1}{\beta-2} \\ \frac{1}{\beta-2} \end{pmatrix}$

(12)

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 2/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

N is niet leeg, bevat nulruimte.

1 $\boxed{2}$ a. voor een matrix $A \in N$

$\Rightarrow \alpha A \in N$,

$\frac{1}{2}$ want $\alpha\, tr(A) = \alpha \cdot 0 = 0 \in N$

~~$tr(\alpha A) =$~~

Voor twee matrices $A \in N$ en $B \in N$

$\Rightarrow A + B \in N$

want $tr(A) + tr(B) = 0 + 0 = 0 \in N$.

~~$tr(A+B) =$~~

$\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ N is een deelruimte van $\mathbb{R}^{n \times n}$

Je moet aantonen dat (αA) en $(A+B) \in N$, dus dat $tr(\alpha A) = 0$ en $tr(A+B) = 0$, niet dat $\alpha\, tr(A) = 0$, want van A weet je al dat het element in N zit.

5 b. $n = 2$, dus een 2×2 matrix

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ waarvoor geldt $tr(A) = 0$.

Als $tr(A) = 0 \Rightarrow a_{11} + a_{22} = 0$

$\Rightarrow a_{11} = -a_{22}$

Dus een basis E van N is $\left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \right]$

De basis E heeft dus een dimensie van $N = 3$

0

Een basis F van $\mathbb{R}^2$ is $\left[\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right]$

~~E is een deelverzameling van F~~

en is gelijk aan F als $\alpha = -\delta$.

Dit is dus een basis van F

een gewenste waarvoor geldt $E \subseteq F$

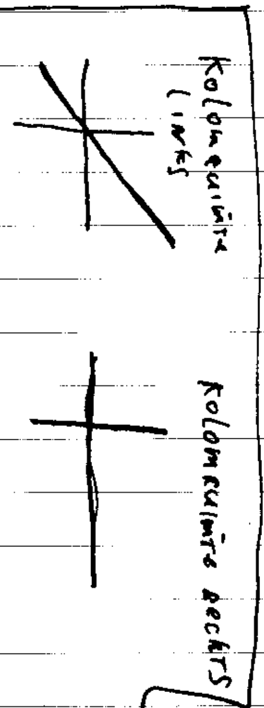
E bestaat uit de vectoren $\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}}$, $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$

deze vector komt niet terug in je F

Dus $E \not\subseteq F$

Om basis voor F te krijgen gewoon een lineair onafhankelijke vector toevoegen.

3a. $L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\3x_1 + 2x_2\end{pmatrix}$



$L(e_1) = L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

$L(e_2) \cancel{= L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$

De standaard Matrix representatie van L ten opzichte van de standaard bases in $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ is

dus $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix}$

4b. $\ker(L) = \{ w \in \mathbb{R} \mid L(w) = 0_v \}$

$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\\3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\\3 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\\0 & -1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\\0 & 0\end{pmatrix} = U$

Er geldt $Aw = 0$ voor $\ker(L)$

$\cancel{\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right)}$

Dit is een non-singulier systeem en heeft alleen de triviale oplossing $w = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Dus $\ker(L) = \left\{ w = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$

$U = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$

Een basis van de ~~Range~~ range $L(\mathbb{R}^2)$ van L is dus $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} \right]$

Vb $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ C.O

deze matrices hebben dezelfde oplossingsverzameling voor een bepaald stelsel. Maar de kolomruimte v.d. matrix links ≠ kolomruimte van matrix rechts

Door elementaire rijoperaties verandert de oplossingsverzameling van een stelsel niet, maar de kolom- of rijruimte wel!

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 3/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

2 $\boxed{4}$ a. Een basis voor P_n

is $[1, x, x^2, \ldots x^{n-1}]$

(Vectorruimte van alle polynomen van graad kleiner dan n en n gegeven heel getal).

1 b De dimensie van P_n is ~~[illegible]~~ n.

In principe ~~[illegible]~~ heeft een polynoomserie een oneindige dimensie. In dit geval mag echter niet een polynoom van een hogere rang gekozen worden, deze ligt niet in de vectorruimte.

Er zijn dan (n-1) "x" polynomen, plus de ~~nulpolynoom~~ 'CONSTANTE' POLYNOOM

Dus de dimensie van P_n is n.

de NULPOLYNOOM heeft dimensie NUL!

4 c Dan ① $T(\alpha p(x)) = \alpha T(p(x))$

en ② $T(p(x)+q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$.

$p(x) \in P_4$ en $q(x)$ in P_4

① ~~Ok~~ $T(\alpha(p(x))$

$= \alpha p(x) - \alpha p''(x)$

$= \alpha(p(x) - p''(x))$

$= \alpha T(p(x))$

$\Rightarrow T(\alpha p(x)) = \alpha T(p(x))$

② ~~Ok~~ $T(p(x)+q(x))$

$= (p+q)(x) - (p+q)''(x)$

$= p(x) - p''(x) + q(x) - q''(x)$

$= T(p(x)) + T(q(x))$

$\Rightarrow T(p(x)+q(x)) = T(p(x)) + T(q(x))$

T voldoet aan beide voorwaarden dus T is een lineaire afbeelding.

$T(x^3) = x^3 - 6x$

$\cancel{x^4 - 12x^2 = 0}$

$\cancel{x^2(x^2 - 12) = 0}$

$\cancel{x^2 = 0 \vee x^2 = 12}$

$\cancel{x = \sqrt{12} \vee x = -\sqrt{12}}$

$\cancel{= 2\sqrt{3} \quad = -2\sqrt{3}}$

$x^3 - 6x = 0$

$x(x^2 - 6) = 0$

$x = 0 \vee x = \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6}$

$T(x^2) = x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

$\cancel{Ker(T) = \{w = 0, w = 2\sqrt{3} \vee w = -2\sqrt{3}\}}$

$\cancel{w = x^4 \Rightarrow w = 0 \vee w = (2\sqrt{3})^4 \vee w = (-2\sqrt{3})^4}$

$\cancel{\Rightarrow w = 0 \vee w = 144}$

$\cancel{\Rightarrow Ker(T) = \{w = 0, w = 144\}}$

$\cancel{(Ker(T) = \{x^4 = 0, x^4 = (2\sqrt{3}), x^4 = (-2\sqrt{3})\})}$

$T(x) = x - 0 = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow Ker(T) = \{x = 0, x = \sqrt{6}, \cancel{x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}}\}$

dus als $p(x) \in Ker(T) \Rightarrow T(p(x)) = p(x) - p''(x) = 0 \Rightarrow p(x) = p''(x)$. En dit is bij polynomen alleen het geval als $p(x) = 0$, de nulpolynoom

e. $T(x^3) = x^3 - 6x = 1 \cdot 0 + (-6) \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$

$T(x^2) = x^2 - 2 = 1 \cdot 2 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

$T(x) = x - 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$

$T(1) = 1 - 0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$.

De matrix $[T]_E$ van T t.o.v. de geordende basis $E = \{1, x, x^2, x^3\}$

is dus

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit hoeft niet noodzakelijkerwijs zo te zijn: Tegenvoorbeeld waar $p(x)$ terugkomt waar $p(x)$ ...

$T(p(x)) = p(x) - xp(x)$

immers $T(x) = x - x = 0$

f. De rang van $[T]_E$ is 4. Er zijn vier lineair onafhankelijke vectoren. ~~Dit komt doordat het polynoom ook in de afbeelding van de geordende basis terugkomt, waardoor de dimensie (en dus rang) behouden blijft.~~

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 4/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

6 $\boxed{5}$ a. x en y zijn lineair onafhankelijk en $\in \mathbb{R}^n$

$S = \text{Span}(x, y)$.

$A = xy^T + yx^T$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} \quad yx^T = \begin{pmatrix} y_1 x_1 & \cdots & y_1 x_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_n x_1 & \cdots & y_n x_n \end{pmatrix}$$

$$A = xy^T + yx^T = \begin{pmatrix} x_1 y_1 + y_1 x_1 & \cdots & x_1 y_n + y_1 x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 + y_n x_1 & \cdots & y_n x_n + y_n x_n \end{pmatrix}$$

~~Voor elkaar~~ xy^T en yx^T zijn elkaars spiegelbeelden in de diagonaal.
Als die ~~...~~ dan bij elkaar opgeteld worden, onstaat een symmetrische matrix.
A is dus symmetrisch.

0 b. $N(A) = R(A^T)^\perp$ $n-2$
Omdat xy^T en yx^T uit lineair afhankelijk vectoren (outer product) van x en y bestaan, is ~~de lengte van~~ $R(A^T)$ gelijk aan S, omdat A^T ~~ook~~ uit 2 lineair onafhankelijke vectoren (dus 2 lineair onafhankelijke) van S bestaat. Alleen de twee vectoren van S in A^T zijn lineair onafhankelijk. →

Dus $R(A^T) = S \Rightarrow R(A^T)^\perp = S^\perp$
$\Rightarrow N(A) = R(A^T)^\perp = S^\perp$
$\Rightarrow N(A) = S^\perp$

Waarom geldt dit? Dit weet je niet zomaar!

Afdeling Wiskunde en Informatica R.U.G.

Naam:	Studentnummer:	Bladnr.: 5/5
Adres:	Studierichting:	Tentamen:
Postcode en		Datum:
Woonplaats:	Jaar van eerste inschrijving:	Naam docent:

5 $\boxed{6.}$

b. $\lambda = 0$ is een eigenwaarde van AB.

Er geldt echter ~~p(0) = det~~ in zijn algemeen
$p(0) = \det(A)$
(Karakteristieke polynoom van de nul-eigenwaarde is de determinant van de matrix).

Dus $p(0) = \det(AB)$

Echter $\det(AB) = \cancel{\det(A)\det(B)}\ \det(A)\det(B) = \det(BA)$.

Dus $p(0) = \det(BA)$.

$\lambda = 0$ is dus ook een eigenwaarde van BA.